المملكة المغربية

CNC 2013

Mathématiques 1

AQALMOUN MOHAMED agrégé de mathématiques MPSI CPGE Khouribga

Quelques aspects de la transformée de Laplace

Ce problème est composé de quatre parties. La deuxième partie utilise essentiellement le résultat de la question 2.c de la première partie. La troisième partie est largement indépendante de la seconde et la quatrième fait appel la troisième ainsi qu'au lemme de ***Lettelwood*** *faisant l'objet de la question 3 de la première partie et le théorème de* ***Cesàro*** *établi à la section 5. de la deuxième partie, ces deux résultats n'interviennent que dans la quatrième partie.*

Dans ce problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^p$ de I dans $\mathbb{K}$, $p \geq 1$.

Si $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$, on rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ est dite convergente lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt$ possède une limite dans $\mathbb{K}$ lorsque x tend vers $+\infty$; on note alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ la valeur de cette limite.

On rappelle aussi que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ peut converger sans que la fonction φ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Toutes fois, pour les fonctions positives, il y'a équivalence entre l'intégrabilité de la fonction sur un intervalle et la convergente de son intégrale sur cet intervalle.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$; pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt$ converge, on note $L(f)(z)$ la valeur de cette intégrale. La fonction ainsi définie est appelée la *transformée de Laplace de f*.

Première partie : Résultats préliminaires

1. Soit $z \in \mathbb{C}$; on note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire ; $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$
   (a) Montrer que la fonction $z \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $\text{Re}(z) > 0$.
   (b) Montrer que si γ est réel non nul, la fonction $t \mapsto \cos(\gamma t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En déduire que la fonction $t \mapsto e^{-iyt}$ possède une limite dans $\mathbb{C}$, lorsque t tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $y = 0$.

(c) Montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt$ converge si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) > 0$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, et $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t)dt$ soit convergente, et soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$, on désigne par F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x e^{-z_0 t} f(t)dt \ \ , x \geq 0$$

   (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{(z-z_0)t} F(t)dt$$

3. **Un Lemme de Lettlewood :** Soit $\psi \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{C})$ une fonction de limite nulle en 0^+ telle que la fonction $x \mapsto x^2 \psi''(x)$ soit bornée sur $]0, +\infty[$, on prolonge ψ par continuité en 0, en posant $\psi(0) = 0$, et on note

$$M = \sup_{t>0} t^2 |\psi''(t)|$$

   (a) Montrer pour tout, $x > 0$ et tout $\alpha \in]0, 1[$, la formule

$$\psi(\alpha x) - \psi(x) = (\alpha - 1)x\psi'(x) + \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)\psi''(t)dt$$

   (b) En déduire, pour tout $x > 0$, et tout $\alpha \in]0, 1[$, l'inégalité

$$|x\psi'(x)| \leq \frac{2}{1-\alpha} \sup_{0 \leq t \leq x} |\psi(t)| + \frac{1-\alpha}{2\alpha^2} M$$

   (c) Montrer alors que la fonction $x \mapsto x\psi'(x)$ est de limite nulle en 0^+.

Deuxième partie :
Exemples et propriétés de la transformée de Laplace

1. Ici $f_\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, désigne la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, déterminer le domaine de définition de $L(f_\lambda)$ et donner l'expression de $L(f)(z)$ lorsque cette quantité est définie.

2. **Abscisse de convergence**
   Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, il existe un unique $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $L(f)(z)$ soit défini si $\mathrm{Re}(z) > \sigma$, et ne le soit pas si $\mathrm{Re}(z) < \sigma$. Si le domaine de définition de $L(f)$ n'est pas vide on pourra considérer la borne inférieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de $\{\mathrm{Re}(z) \ ; \ L(f)(z) \text{ existe}\}$.
   σ est appelé l'abscisse de convergence de $L(f)$ et est noté $\sigma(f)$.

3. **Quelques propriétés**
   Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ une fonction telle que $\sigma(f) < +\infty$, D'après ce qui précède la transformée de Laplace est définie sur le demi plan $\Pi(\sigma(f)) = \{z \in \mathbb{C} \ , \ \mathrm{Re}(z) > \sigma(f)\}$ du plan complexe, donc aussi sur l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$.

Dans la suite du problème, on note aussi $L(f)$ la restriction à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$ de la transformée de Laplace de f.
Dans les questions qui suivent , on pourra utiliser avec profit le résultat de la question 2.3. ci-dessus de la première partie et exploiter au mieux les propriétés de la fonction F définie en 2. de la première partie.

(a) Montrer que la fonction $L(f)$ est continue sur le demi plan $\Pi(\sigma)$.

(b) On note $\Omega_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x > \sigma(f)\}$; il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on défini l'application noté L_f par

$$L_f(x, y) = L(f)(x + iy) \ , \ (x, y) \in \Omega_f$$

Montrer que l'application L_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω_f et que

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x, y) = -\int_0^{+\infty} te^{-(x+iy)t} f(t)dt \ , \ (x, y) \in \Omega_f$$

(c) Montrer que la restriction à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$ de la transformée de Laplace de f est de clesse $\mathcal{C}^\infty$, et donner pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression intégrale de la dérivée d'ordre p de $L(f)$ noté $L(f)^{(p)}$. On pourra raisonner par récurrence sur p.

(d) Montrer que l'application $x \mapsto L(f)(x)$, définie sur l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$, admet une limite nulle en $+\infty$.

4. Soit ω la fonction définie par, $\omega(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$, $t > 0$; on la prolonge par continuité en 0

(a) Préciser la valeur en 0 de la fonction et montrer que $\sigma(\omega) \leq 0$.

(b) Calculer la dérivée seconde de l'application $x \mapsto L(\omega)(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

(c) En déduire, pour tout $x > 0$, l'expression de $L(\omega)'(x)$, puis celle de $L(\omega)(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. On pourra utiliser la question 3.4 de la deuxième partie pour calculer les constantes d'intégration.

5. **Un théorème de Cesàro** : Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ une fonction à valeurs positives telle que $\sigma(g) \leq 0$; on suppose de plus que la fonction $x \mapsto xL(g)(x)$ **admet** 1 **comme limite en** 0^+ .

(a) Montrer que, pour tout $x > 0$, et toute fonction h continue par morceaux sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles, la fonction $t \mapsto e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose alors

$$\Delta_x(h) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})dt$$

(b) Si P est un polynôme à coefficients réels, on désigne également par P la restriction au segment $[0, 1]$ de la fonction polynomiale associée. Montrer que $\Delta_x(P)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt$ lorsque x tend vers 0^+. On pourra exploiter la linéarité de Δ_x.

(c) En donnant un énoncé précis du théorème utilisé, établir que la propriété précédente s'étend aux fonction continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

(d) On admet ici que le résultat de la question précédente s'étend aux fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles, et on considère la fonction h_1 définie sur $[0, 1]$ par :

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{1}{e} \\ \frac{1}{t} & \text{si} \quad \frac{1}{e} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} g(t)dt$ en fonction de x et de $\Delta_x(h_1)$ puis en déduire que la fonction $a \mapsto \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a g(t)dt$ définie sur $]0,+\infty[$, tend vers 1 lorsque a tend vers $+\infty$.

Troisième partie :
Comportement au voisinage de l'origine

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$; on s'intéresse dans cette partie à l'étude du comportement au voisinage de 0^+ de la transformée de Laplace $L(f)$ en rapport avec l'existence de $L(f)(0)$.

1. Dans cette question on suppose que $L(f)(0)$ existe, ce qui est équivaut à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$, on en déduit que $\sigma(f) \leq 0$.
   (a) En déduire que $L(f)(x)$ admet $L(f)(0)$ comme limite lorsque x tend vers 0^+. On pourra exploiter le fait que $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = L(f)(0)$, puis découper l'intégrale précédent en deux.
   (b) Montrer par un exemple que la fonction $L(f)$ peut étre définie sur $]0,+\infty[$ et posséder une limite dans $\mathbb{C}$ en 0^+ sans que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^+$ soit convergente.

   Dans la suite de cette partie, on se propose d'étudier une condition suffisant d'existence de $L(f)(0)$ lorsque la fonction $L(f)$ possède une limite en 0^+.
   Dans cette question on suppose que la fonction $t \mapsto tf(t)$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. **Théorème de Tauber.**
   (a) Justifier que $\sigma(f) \leq 0$.
   (b) Montrer que la fonction $a \mapsto \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a |tf(t)|dt$ tend vers 0 en $+\infty$.
   (c) Monter que pour tout, réel u, $1 - e^{-u} \leq u$.
   (d) Montrer que pour toue réels x et a strictement positifs, on a

$$\left|L(f)(x) - \int_0^a f(t)dt\right| \leq \int_0^a (1-e^{-xt})|f(t)|dt + \int_a^{+\infty} e^{-xt}|f(t)|dt,$$

   puis en déduire que

$$\left|L(f)(x) - \int_0^a f(t)dt\right| \leq x\int_0^a |tf(t)| + \frac{1}{ax}\sup_{t\geq a}|tf(t)|$$

   (e) On suppose de plus que la fonction $L(f)$ possède une limite $\mu \in \mathbb{C}$ en 0^+. En choisissant convenablement x en fonction de a, déduire de ce qui précède que $L(f)(0)$ existe et vaut 0.

Quatrième partie :
Une généralisation du théorème de Tauber dans le cas réel

Dans cette partie on prend $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, et on suppose que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est bornée sur $[0,+\infty[$. On pose $M = \sup\limits_{t\geq 0}|tf(t)|$, et désigne par f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :

$$f_1(x) = \int_0^x tf(t)dt\, x \geq 0,\quad f_2(x) = \frac{f_1(x)}{x},\quad x > 0,\quad \text{et}\quad f_3(x) = \frac{f_2(x)}{x}\, x > 0\,.$$

1. Justifier que les fonctions f_2 et f_3 sont continues sur $]0,+\infty[$ et montrer qu'elles sont prolongeables par continuité en 0. On pourra utiliser le théorème de Rolle pour traiter f_3.
   Dans la suite, on notera encore f_2 et f_3 les prolongements par continuité ainsi obtenues.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ admet 0 comme limite en $+\infty$.
3. Monter que, pour tout $x > 0$,les fonctions $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. En particulier $\sigma(f_2) \leq 0$ et $\sigma(f_3) \leq 0$.
4. Montrer , pour tout triplet (u, v, x) de réels strictement positifs, la relation
   $$\int_u^v f(t)e^{-xt}dt = f_2(v)e^{-xv} - f_2(u)e^{-xu} + x\int_u^v f_2(t)e^{-xt}dt + \int_u^v f_3(t)e^{-xt}dt$$
   puis en déduire que $\sigma(f) \leq 0$ et que $L(f)(x) = xL(f_2)(x) + L(f_3)(x)$
   On suppose désormais que la fonction $L(f)$ admet 0 comme limite en 0^+.
5. On va montrer ici que la fonction $t \mapsto tf_3(t)$ tend vers 0 en $+\infty$. On note g la fonction définie par $g(t) = 1 - \dfrac{tf(t)}{M}$, $t \geq 0$ où $M = \sup\limits_{t\geq 0} |tf(t)|$. Il est claire que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $g \geq 0$ et $\sigma(g) \leq 0$.
   (a) Montrer en utilisant le lemme de **Lettlewood**, que la fonction $x \mapsto xL(f)'(x)$ est de limite nulle en 0^+.
   (b) En déduire que la fonction $x \mapsto xL(g)(x)$ admet 1 comme limite en 0^+.
   (c) Montrer alors que la fonction $x \mapsto xf_3(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. On pourra utiliser Cesàro.
6. Montrer que la fonction $x \mapsto xL(f_2)(x)$ admet 0 comme limite en 0^+. On pourra utiliser en le justifiant le fait que $f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
7. En déduire que $L(f_3)(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ puis montrer que $L(f_3)(0)$ existe et vaut 0.
8. Montrer alors que $L(f)(0)$ existe et vaut 0. On pourra effectuer une intégration par parties.
9. On considère ici une fonction $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que la fonction $t \mapsto tf(t)$ soit bornée sur $[0, +\infty[$, et on suppose de plus que la fonction $L(\phi)$, définie sur $]0, +\infty[$, admet en 0^+ une limite $\mu \in \mathbb{R}^*$, montrer que $L(\phi)(0)$ existe et vaut μ.



